Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

15-2 | 2011
La syllogistique de Łukasiewicz

Compte rendu de : Louis Couturat, *L'Algèbre de la logique*

Traduction du français avec un texte complémentaire par I. Slešinskij, Mathesis, Odessa 1909

Paul Ehrenfest

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/664
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.664
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 1 septembre 2011
Pagination : 179-184
ISBN : 978-2-84174-557-9
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Paul Ehrenfest, « Compte rendu de : Louis Couturat, *L'Algèbre de la logique* », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 15-2 | 2011, mis en ligne le 01 septembre 2014, consulté le 04 novembre 2020. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/664 ; DOI : https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.664

Tous droits réservés

Compte rendu de : Louis Couturat, *L'Algèbre de la logique* (Traduction du français avec un texte complémentaire par I. Slešinskij, Mathesis, Odessa 1909)

Paul Ehrenfest

Pour l'exposé de la logique formelle, voici les circonstances qui sont données : la classification extraordinairement subtile des différentes formes de jugements et de conclusions, qui se produit déjà dans la *conscience*, ne trouve dans la langue qu'un instrument trop lourd et grossier.

Pour cette raison, il est de pratique courante, depuis longtemps dans l'étude des jugements et des conclusions, de représenter cette classification par des symboles conventionnels.

À cela se rapporte surtout le classement des jugements dans les modes « A, E, I, O », ainsi que les symboles verbaux générés avec eux pour les dix-neuf modes de conclusions valides (de « Barbara » à « Ferison » au XIIIe siècle). Par la suite se développa un symbolisme représentant les différents concepts par des cercles sur un plan : les différentes façons d'arranger les cercles correspondent aux différents cas de la jonction de deux concepts dans un jugement.

Le premier symbolisme n'est bien sûr guère plus qu'une sténographie, qui réduit à une image tous les éléments du jugement, mais qui est inflexible. Le deuxième symbolisme est déjà beaucoup plus utile : par le système de cercles on peut effectuer, conformément à des règles déterminées, des transformations qui ont, dans la logique, une interprétation déterminée. (On peut comparer cela au fait que les formules chimiques ne fournissent pas seulement un répertoire des différentes substances, mais que les transformations de ces formules, effectuées conformement à certaines règles, correspondent aux transformations chimiques.)

Il va de soi que ce domaine devait, tôt ou tard, suggérer aux esprits *spéculatifs*-mathématiques la tentative suivante : transposer ce principe des dénotations symboliques, qui s'est avéré si fertile dans l'*opération avec les nombres et les grandeurs*, à l'*opération avec tout concept.*

Philosophia Scientiæ, 15 (2), 2011, 179–184.

À cela se rapportent déjà les tentatives de *Leibniz* et de *Grassmann*. La poursuite du développement de l'« algèbre de la logique » est due à deux mathématiciens : à l'Anglais George Boole (1815-1864) et à l'Allemand E. Schröder (1841-1902) ; des mathématiciens de tous les pays contribuèrent à son élaboration ultérieure. Quant à la participation des mathématiciens russes, c'est P. Porětckīj qui, par sa façon originale de poser les questions, contribua pour beaucoup à la simplification des méthodes.

L'« algèbre de la logique » établit surtout des signes symboliques pour ces opérations élémentaires qui sont aussi importantes pour opérer avec des concepts que l'addition, l'égalisation, etc., sont importantes pour opérer avec les nombres et les grandeurs. Par conséquent, les axiomes sur lesquels repose toute la logique adoptent la forme de *règles indiquant comment effectuer des calculs avec ces symboles*, c'est-à-dire comment transformer un complexe de tels symboles en un autre complexe qui lui est équivalent. En raison du caractère typographique — s'il est permis de s'exprimer ainsi — pour ces opérations, les mêmes signes qui avaient été introduits dans la typographie par les mathématiciens il y a déjà longtemps, furent choisis. Cette convention — sans laquelle il serait impossible d'exposer l'algèbre de la logique dans les pages de la présente revue — donne parfois aux formules de cette discipline au premier coup d'œil une apparence paradoxale, p. ex. :

$$(1)\quad 1+1=1\,; \qquad (2)\quad A+AB=A\,;$$
$$(3)\quad AAA=A\,; \qquad (4)\quad (A+B)(B+C)(C+A)=AB+BC+CA,$$

où les égalités (2), (3) et (4) sont valides nonobstant le choix des concepts A, B et C. Par exemple, A = « tout ce qui est noir », B = « tout ce qui est sphérique » et C = « tout ce qui est solide ».

La justesse de ces égalités devient cependant immédiatement compréhensible sitôt que l'on déclare quelles opérations doivent être comprises dans l'algèbre de la logique sous les signes qui désignent ces actions.

(AB) veut dire : « *tout ce qui fait partie à la fois de la classe A et de la classe B* » (sphère noire).

La même chose est vraie pour (BC) et (CA).

La langue est d'ailleurs beaucoup trop lourde pour se mettre au pas de cette construction — d'un point de vue logique — primitive ; dans la plupart des cas, la commutation est interdite (noirceur sphérique ? !) ; dans d'autres cas, la commutation, suite à des conventions contingentes,

donne une signification toute différente au mot (soie luisante = luisance soyeuse).

$(A+B)$ veut dire : tout ce qui fait partie de la classe A et, de surcroît, tout ce qui fait partie de la classe B.

L'expression verbale plus précise de cette addition devrait être la suivante : tout ce qui fait partie soit de A, soit de B, soit des deux à la fois (exemple : « médecins et savants »).

À ce point il n'est pas difficile de vérifier les égalités (2) et (3) à l'aide d'exemples.

Par exemple, tout ce qui est sphérique + toutes les sphères noires = tout ce qui est sphérique.

Aussi est-il facile de vérifier l'égalité (4) à l'aide de la « multiplication » et d'une multiple application des égalités (2) et (3).

1 signifie : *La totalité du pensable.*

Par conséquent l'égalité (1) est évidente.

0 signifie : *la classe qui ne contient rien de pensable.*

A' signifie : « non-A », c'est-à-dire tout ce qui n'est pas A.

Il est facile de vérifier les propositions suivantes :

$$AA' = 0; \qquad A + A' = 1.$$
$$(AB)' = A' + B'.$$

$(A < B)$ signifie : *Tout A est essentiellement B*, ce qu'on peut exprimer aussi de la façon suivante :

$$A = xB \quad \text{ou} \quad AB' = 0.$$

Ainsi, il est déjà possible de déduire *par la seule voie du calcul* tous les syllogismes, p. ex. la forme « Ferison » :

Aucun homme (L) n'est omniscient (M) ..... $L = xM'$
Quelques gens sont des savants (N) ..... $yL = zN$
Quelques savants ne sont pas omniscients ..... $zN = xyM'$

Or, en se servant de l'algèbre de la logique, on peut se passer de la construction successive de tous les syllogismes. Normalement, il est possible d'arriver au but beaucoup plus vite : d'abord, le système entier des prémisses données est établi sous forme d'égalités. Ce système de

jugements est transformé en un seul jugement qui lui est équivalent, tout en tenant compte du fait que la proposition $A + B + C + \ldots = 0$ est équivalente à $A = 0$, $B = 0$, ...

Ensuite, on « calcule » — en un certain sens — conformément aux règles déterminées, le système entier (!) de jugements qui découlent de ce jugement central. Tous les calculs sont très simples, étant donné que la sphère d'opérations de l'algèbre de la logique — contrairement à l'algèbre ordinaire — ne s'étend pas à l'infinité. (Ici il n'y a pas p. ex. de « puissance » — cf. l'égalité (3).)

Le domaine d'emploi de l'algèbre de la logique s'élargit encore considérablement pour la raison suivante.

Dans les égalités de l'algèbre de la logique les symboles A, B, ... ne peuvent pas seulement représenter des concepts, mais aussi *des égalités entières liant des concepts* L, M, ...

Dans une telle interprétation, l'égalité

$$(LM' = L) = (LM = 0)$$

exprime d'une manière inopinément brève le *théorème* suivant, que l'on vérifie aisément à l'aide d'exemples :

« L'assertion que la totalité de tous les L qui sont à la fois des non-M coïncide avec la totalité de tous les L tout court, est équivalente à l'assertion qu'aucun M n'appartient à la classe L. »

De la même façon l'égalité :

$$(A + B + C = 0) = (A = 0)(B = 0)(C = 0)$$

exprime le théorème mentionné ci-dessus sur la possibilité d'unir plusieurs jugements en un seul.

Toute cette indication a pour but de circonscrire, au moins de l'extérieur, la technique de cette discipline originale dont le petit livre de *Couturat* présente l'introduction.

Il peut en effet passer pour une introduction dans la mesure où l'auteur ne suppose aucune notion antérieure chez le lecteur — à l'exception de la connaissance des notions générales de la logique — et où ce livre présente au lecteur toutes les questions qui constituent la base de la littérature très vaste (l'œuvre de Schröder comprend quatre gros tomes) sur ce sujet.

Dans un autre sens, la lecture de ce livre demande pourtant un travail *très* sérieux, étant donné que l'auteur ne se borne pas à un exposé général de la méthode symbolique, mais qu'il l'*utilise* — à partir de la page 7

— pour l'exposé et la dérivation de tous les théorèmes. Par conséquent, il n'est pas possible de lire tout simplement ce livre d'un bout à l'autre, mais il est nécessaire d'en accompagner la lecture par l'exécution de calculs à toutes les pages. En outre, son point de vue est extraordinairement abstrait — il est écrit pour les mathématiciens français. (En ce sens les annotations de l'édition russe présentent une aide *très importante.*)

Pour cette raison et pour une connaissance sommaire du sujet, peut-être devrait-on préférer un autre livre paru antérieurement [1]. Par contre, c'est justement cet exposé utilisant la méthode symbolique qui permet au lecteur de s'assurer de ses trois avantages :

1. Elle permet de désigner clairement la totalité des présuppositions d'une conclusion quelconque, de sorte que l'introduction d'assomptions inconscientes qui se produit souvent dans la formulation verbale du raisonnement, est *presque* complètement exclue. En particulier, les axiomes sur lesquels la logique formelle repose sont mis en relief de façon claire et de surcroît tout à fait inhabituelle.
2. On obtient une brièveté étonnante de l'exposé, car la formulation de tous les raisonnements à l'aide des égalités logiques est au moins 5 à 10 fois plus courte que la formulation verbale.
3. La formulation symbolique permet de « calculer » les conclusions de systèmes de prémisses compliquées à tel point qu'elles sont à peine compréhensibles sous la forme verbale.

On a heureusement perdu l'habitude de demander une quelconque utilité à toutes les spéculations mathématiques. Pourtant, il convient peut-être d'évoquer la question de savoir si de tels systèmes compliqués de prémisses ne se trouvent aucunement dans la physique ou dans la technique. *Il me semble qu'il faut répondre affirmativement à cette question.* Un exemple : soit la conception d'un schéma de connexions d'une centrale téléphonique. Il faut vérifier : 1) si elle marchera quelles que soient les combinaisons qui coïncident pendant son activité ; 2) si elle n'est pas trop compliquée.

Toutes ces combinaisons sont des prémisses, tous les commutateurs minuscules sont des « ou-ou » logiques, incarnés en ébonite et en laiton. Somme toute, cela constitue un système de « prémisses » purement qualitatives (justement pas *quantitatives* dans un réseau de faible courant) qui ne laisse rien à désirer en ce qui concerne la complexité.

1. Par exemple E. Schröder, *Operationskreis des Logikcalculs,* Teubner 1877.

Pour trouver la réponse à ces questions, faut-il, une fois pour toutes, se contenter du processus génial — mais cependant en majeure partie schématique — d'expérimenter sur le plan graphique ?

Est-il vrai qu'une sorte d'« algèbre des schémas de connexion » doit être considérée comme utopique malgré l'existence d'une « algèbre de la logique » ?

P. Ehrenfest

Журналъ русскаго физико-химическаго общества при Императорскомъ С.-Петербургскомъ Университете. Томъ XLII. физическій отделъ. *Годъ 37-ои.* 1910, 382–387.

Journal de la société physico-chimique russe à l'université impériale de Saint-Pétersbourg. Tome XLII, section physique, 37e année, 1910, 382–387.